Societatea de Științe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017

CLASA a V-a

Problema 1. Un număr natural se micșorează cu 2017 dacă îi ștergem ultimele două cifre. Care este numărul?

Gazeta Matematică

Problema 2. Aflați numerele naturale prime a, b, c, dacă $a = b^4 + c^3$ și $a \leq 2017$.

Problema 3. Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$. Determinați numărul submulțimilor $B \subset A$ cu trei elemente care îndeplinesc simultan condițiile:

(a) cel puțin două elemente din mulțimea B sunt numere naturale consecutive;

(b) există $a \in B$ pentru care $3a \in B$.

Problema 4. Găsiți toate modurile de colorare cu roșu sau verde a numerelor $1, 2, \ldots, 10$ astfel încât să îndeplinească condițiile:

(a) numărul 5 să fie colorat cu roșu;

(b) dacă numerele x și y sunt de culori diferite și $x + y \leq 10$, atunci numărul $x + y$ trebuie colorat cu verde;

(c) dacă numerele x și y sunt de culori diferite și $xy \leq 10$, atunci numărul xy trebuie colorat cu roșu.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a VI-a

Problema 1. Dacă $a_1, a_2, ..., a_{2017}$ sunt numere naturale nenule, arătaţi că fracţia

$$\frac{9^{2017} - 7 \cdot 3^{2017} + 7}{9^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_{2016}+a_{2017})(a_{2017}+a_1)} - 1}$$

este reductibilă.

Problema 2. Se consideră A mulţimea tuturor numerelor naturale de trei cifre $\overline{abc}$, formate din trei cifre consecutive, nu neapărat în ordine.

a) Determinaţi cardinalul mulţimii A.

b) Demonstraţi că, oricum am alege câteva elemente din mulţimea A, suma acestora nu poate fi egală cu 2017.

Problema 3. a) Comparaţi numerele 2^{53} şi 3^{35}.

b) Demonstraţi că, dacă $5b \geq 3a > 0$, atunci $2^{\overline{ab}} < 3^{\overline{ba}}$.

Gazeta Matematică

Problema 4. a) Arătaţi că, într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°, cateta care se opune unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.

b) În interiorul triunghiului ABC cu $m(\sphericalangle A) = 100°$ şi $m(\sphericalangle B) = 20°$ se consideră punctul D, astfel încât $m(\sphericalangle DAB) = 30°$ şi $m(\sphericalangle DBA) = 10°$. Determinaţi $m(\sphericalangle ACD)$.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numărul natural $n \geq 3$ cu proprietatea că $3n+1$ este pătrat perfect. Arătaţi că există trei numere naturale nenule a, b, c astfel încât numărul

$$x = \sqrt{1 + \frac{3n+3}{a^2+b^2+c^2}}$$

să fie natural.

Problema 2. Fie $E(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{x+2}{y+2}$.

a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $E(x,y) = 3$.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care ecuaţia $E(x,y) = n$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Gazeta Matematică

Problema 3. Pe latura $[CD]$ a pătratului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = 60°$, iar pe semidreapta $(BA$ se ia punctul F astfel încât $[BE] \equiv [BF]$. Se notează cu M punctul de intersecţie al dreptelor EF şi AD.

a) Arătaţi că $m(\sphericalangle BME) = 75°$.

b) Bisectoarea unghiului CBE intersectează dreapta CD în punctul N. Arătaţi că triunghiul BMN este echilateral.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle C)$. Punctul E aparţine bisectoarei interioare a unghiului B astfel încât $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ACB$. Fie D un punct pe dreapta BC astfel încât $B \in (CD)$ şi $[BD] \equiv [AB]$. Arătaţi că mijlocul M al segmentului $[AC]$ este situat pe dreapta DE.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a VIII-a

Problema 1.
a) Fie $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m > n$, astfel încât $\sqrt{m} - \sqrt{n} = p$. Demonstraţi că m şi n sunt pătrate perfecte.
b) Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ care verifică egalitatea

$$\sqrt{\overline{abcd}} - \sqrt{\overline{acd}} = \overline{bb}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură a. Notăm cu M şi P mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[DD']$.
a) Demonstraţi că $MP \perp A'C$;
b) Calculaţi distanţa dintre dreptele MP şi $A'C$.

Probleme 3.
a) Fie $x \in [1, \infty)$. Demonstraţi că $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0$.
b) Fie $a, b \in [1, \infty)$. Determinaţi minimul expresiei $ab(a + b - 10) + 8(a + b)$.

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură 1. O furnică parcurge un drum pe suprafaţa cubului, pornind din A şi terminând în C'. Deplasarea este permisă numai pe muchiile cubului şi pe diagonalele feţelor. Ştiind că drumul nu trece prin niciun punct de două ori, determinaţi lungimea maximă a unui asemenea drum.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinte Matematice din România

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor triunghiului ascuţitunghic ABC. Pe segmentele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 se consideră punctele X, Y , respectiv Z, astfel încât

$$\frac{C_1X}{XB_1} = \frac{b\cos C}{c\cos B}, \frac{A_1Y}{YC_1} = \frac{c\cos A}{a\cos C} \text{ şi } \frac{B_1Z}{ZA_1} = \frac{a\cos B}{b\cos A}.$$

Arătaţi că dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie ABC un triunghi în care O şi I sunt respectiv centrul cercului circumscris şi centrul cercului înscris. Mediatoarele segmentelor IA, IB, IC se intersectează două câte două formând triunghiul $A_1B_1C_1$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}.$$

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale nenule. Notăm $S_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că:

a) Dacă p este un număr prim, $p \geq 5$, atunci S_p se divide cu p;

b) S_5 nu este pătrat perfect.

Problema 4. Fie a, b, c numere reale pozitive cu proprietatea $ab + bc + ca + abc = 4$. Arătaţi că

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3 \leq a + b + c.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice
din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a X-a

Problema 1. a) Să se determine $x \in \mathbb{N}$ şi $y \in \mathbb{Q}$ dacă $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y$.
b) Să se arate că există o infinitate de perechi $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ astfel încât $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinaţi perechile (x, y) de numere întregi pentru care

$$2^x + \log_3 x = y^2 \text{ şi } 2^y + \log_3 y = x^2.$$

Problema 3. Fie $a \in (0, +\infty)$. Demonstraţi inegalitatea

$$a^{\sin x} \cdot (a+1)^{\cos x} \geq a, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Problema 4. Fie $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
a) Demonstraţi că $(|z+1| - \sqrt{2})(|z-1| - \sqrt{2}) \leq 0, \forall z \in A$.
b) Demonstraţi că pentru orice $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in A$ există o alegere a semnelor "$\pm$" pentru care

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| < 17.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a XI-a

Problema 1.
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 > 2$ şi

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

a) Arătaţi că $a_{2n-1} + a_{2n} > 4$, oricare ar fi $n \geq 1$, şi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) Determinaţi cel mai mare număr real a pentru care inegalitatea

$$\sqrt{x^2+a_1^2} + \sqrt{x^2+a_2^2} + \sqrt{x^2+a_3^2} + \ldots + \sqrt{x^2+a_n^2} > n\sqrt{x^2+a^2}$$

este adevărată oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică

Problema 2.
a) Arătaţi că există funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

$$f \circ g = g \circ f, \ f \circ f = g \circ g \ \text{ şi } \ f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Arătaţi că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu proprietăţile $f \circ g = g \circ f$ şi $f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, atunci

$$(f \circ f)(x) \neq (g \circ g)(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Problema 3.
Se consideră două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ce nu comută.

a) Ştiind că $A^3 = B^3$, arătaţi că A^n şi B^n au aceeaşi urmă, pentru orice număr natural nenul n.

b) Daţi exemplu de două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ce nu comută, astfel ca pentru orice număr natural nenul n, A^n şi B^n să fie diferite dar să aibă aceeaşi urmă.

Problema 4.
Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ cu $\det A = 0$ şi A^* adjuncta sa. Arătaţi că $\left(A^*\right)^2 = (\mathrm{tr}A^*)A^*$, unde $\mathrm{tr}A^*$ este urma matricei A^*.

(Se poate folosi faptul că $\mathrm{rang}(XY) \geq \mathrm{rang}(X) + \mathrm{rang}(Y) - n, \forall X, Y \in M_n(\mathbb{C})$.)

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ funcţii continue, astfel încât $f(x)g(x) \geq 4x^2$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|, \quad \left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

este mai mare sau egal cu 1.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi fie m şi n două numere naturale nenule, prime între ele. Arătaţi că, dacă funcţiile $f\colon G \to G$, $f(x) = x^{m+1}$, şi $g\colon G \to G$, $g(x) = x^{n+1}$, sunt endomorfisme surjective, atunci grupul G este comutativ.

Problema 3. Determinaţi cel mai mic număr real a, care îndeplineşte condiţia

$$a \geq \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(a_1 + \cdots + a_k),$$

oricare ar fi numărul natural nenul n şi oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a_1, \ldots, a_n$, a căror sumă este cel mult π.

Problema 4. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$ şi care îndeplineşte simultan următoarele două condiţii:

(1) A nu este corp;
(2) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinversabil x din A.

Arătaţi că:

(a) $a+x$ este neinversabil, oricare ar fi a şi x din A, a inversabil şi x nenul şi neinversabil;
(b) $x^2 = x$, oricare ar fi x din A.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.